Grenzwert

einer Zahlenfolge (a_n) nennt man eine reelle Zahl g für die folgendes gilt:

Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine gewisse Indexzahl n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ der Abstand zwischen den Folgengliedern a_n und der Zahl g kleiner als ε ist: $|\boldsymbol{a_n - g}| < \varepsilon$.

Konvergent

nennt man eine Folge (a_n), wenn sie einen Grenzwert g besitzt. Man schreibt dann:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = g}$$

gelesen *"Limes von a n für n gegen unendlich ist gleich g"*.

Man sagt auch die Folge (a_n) **konvergiert** gegen g.

Nullfolge

nennt man eine Folge (a_n), die gegen 0 konvergiert.

Uneigentliche Grenzwerte

Eine Folge hat den **uneigentlichen Grenzwert** ∞, wenn es zu jeder noch so großen Zahl K eine Indexzahl n_0 gibt, sodass alle Folgenglieder $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ größer als K sind.

Man schreibt dafür auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und sagt "(a_n) *strebt gegen unendlich*" (aber **nicht** *konvergiert gegen unendlich*!).

Eine Folge hat den **uneigentlichen Grenzwert** $-\infty$, wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl K eine Indexzahl n_0 gibt, sodass alle Folgenglieder $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ kleiner als K sind.

Man schreibt dafür auch $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und sagt "(a_n) *strebt gegen minus unendlich*" (aber **nicht** *konvergiert gegen minus unendlich*!).

Beispiele

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist **nicht** konvergent und hat **keinen** uneigentlichen Grenzwert.

Ist c eine beliebige reelle Zahl und (b_n) eine Folge mit einem **uneigentlichen** Grenzwert und $b_n \neq 0$ für jedes n, dann ist die Folge (a_n) mit $\boldsymbol{a_n = \frac{c}{b_n}}$ eine **Nullfolge**.

Beispielsweise (a_n) mit $a_n = \frac{42}{n^2} \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{42}{n^2}\right) = 0$.

Ist c eine beliebige reelle Zahl und q eine reelle Zahl mit $\boldsymbol{|q| < 1}$, dann ist die Folge (a_n) mit $\boldsymbol{a_n = c \cdot q^n}$ eine **Nullfolge**.

Beispielsweise (a_n) mit $a_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

Grenzwertsätze für Folgen

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, dann sind ihre *Verknüpfungen*

Summe	$(a_n + b_n)$,	Differenz	$(a_n - b_n)$	
Produkt	$(a_n \cdot b_n)$,	Quotient	$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$	, $b_n \neq 0$ für jedes n,

ebenfalls konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,, \qquad sofern \;\; \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\,.$$

Ist (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \geq 0$ für jedes n, dann konvergiert auch $\left(\sqrt{a_n}\right)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}\,.$$

Einschachtelungssatz

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit dem gleichen Grenzwert g und ist (c_n) eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für jedes n, dann konvergiert auch (c_n) gegen den gleichen Grenzwert g.

Vergleichssatz

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen und ist $a_n \leq b_n$ für jedes n, dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$