Vollständige Induktion (auch Induktionsprinzip, Induktionsbeweis)

ist ein **mathematisches Beweisverfahren**, das zum Ziel hat die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n bzw. für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ von einem gewissen Startindex n_0 an zu beweisen.

Nachdem eine Vermutung aufgestellt wurde, also die Aussage $A(n)$ formuliert wurde, läuft es in drei Schritten ab:

1. **Induktionsanfang** - Zeige das $A(n)$ für eine konkrete (kleinste) Zahl n_0 gilt
2. **Induktionsannahme** - Setze voraus, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt
3. **Induktionsschritt** - Schließe aus 2. auf die Gültigkeit von $A(n+1)$

Nach Ablauf der drei Schritte - die Nachweise in 1. und 3. müssen tatsächlich erfolgreich gewesen sein - gilt die Aussage $A(n)$ für jedes n als bewiesen.

Musterbeweis durch vollständige Induktion

<u>Behauptung</u> (Formulierung der Aussage $A(n)$)

- Es gilt $1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für jede natürliche Zahl n.

<u>Beweis</u> (durch vollständige Induktion)

1. Wähle $n = 1$ und zeige die Gültigkeit von $A(1)$:
   $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ist offenbar eine wahre Aussage.

2. Es sei $n \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl und
   $1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ sei für dieses n wahr.

3. Zu zeigen: Unter der Voraussetzung aus 2. muss auch $A(n+1)$, also
   $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ wahr sein.

   Nachweis/Herleitung:

$$
\begin{aligned}
& 1+2+\cdots+n+(n+1) \\
&= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{[hier wurde die Voraussetzung aus 2. benutzt]} \\
&= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung $1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für jedes n bewiesen.

Durch vollständige Induktion lassen sich die folgenden Gleichungen, Ungleichungen und Teilbarkeitsprobleme leicht beweisen:

Summe der ersten n Quadratzahlen

Es gilt $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für jedes $n \geq 1$.

Summe der ersten n Zweierpotenzen

Es gilt $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$ für jedes $n \geq 1$.

Geometrische Summenformel

Es sei $q \in \mathbb{R}$ und $q \neq 1$. Dann gilt $q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für jedes $n \geq 0$.

Bernoulli-Ungleichung

Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 1$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + x \cdot n$ für jedes $n \geq 1$.

Quadratzahlen < Zweierpotenzen

Es gilt $n^2 < 2^n$ für jedes $n \geq 5$.

Teilbarkeitsprobleme

Für jedes $n \geq 1$ ist $7^n - 1$ durch 6 teilbar.

Für jedes $n \geq 1$ ist $9^n - 1$ durch 8 teilbar.