Summensymbol Σ

Um Summen wie z.B. $1+2+3+4+5+6+7$ abzukürzen, benutzt man das Summensymbol Σ (Griechischer Großbuchstabe Sigma):

$$1+2+3+4+5+6+7=\sum_{i=1}^{7} i$$

und liest dann ***Summe i für i gleich 1 bis 7***.

In allgemeiner Form mit Termen a_i schreibt man

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

und liest ***Summe a_i für i gleich 1 bis n***.

Teilsummen, Partialsummen

sind Summen der Form

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

gebildet aus den ersten n Gliedern einer Zahlenfolge (a_n).

Reihe

nennt man eine Folge (s_n) von Teilsummen. Ihre Folgenglieder sind Summen der Form

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1+a_2 \\ s_3 &= a_1+a_2+a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiele

(s_n) mit $s_n=\sum_{i=1}^{n} 2^i$ und $(a_n)=(2,4,8,16,\cdots)$

(s_n) mit $s_n=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ und $(a_n)=\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\cdots\right)$

(s_n) mit $s_n=\sum_{i=0}^{n} q^i$ und $(a_n)=(1,q,q^2,q^3,\cdots),\ q\in\mathbb{R}$

Arithmetische Reihe

ist eine Reihe (s_n) mit $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, wobei (a_n) eine arithmetische Folge ist.

Für ihre Folgenglieder gilt

$$\boldsymbol{s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)} \,.$$

Beispiel

$(a_n) = (2, 4, 6, 8, \cdots)$ mit $a_n = 2n$

$(s_n) = (2, 6, 12, 20, \cdots)$ mit $s_n = \sum_{i=1}^{n} 2i = \frac{n}{2} \cdot (2 + 2n)$

Geometrische Reihe

ist eine Reihe (s_n) mit $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, wobei (a_n) eine geometrische Folge ist.

Für ihre Folgenglieder gilt im Fall $q \neq 1$

$$\boldsymbol{s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 \sum_{i=0}^{n} q^i = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \,.$$

Beispiel

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, \cdots)$ mit $a_n = 2^n$, $n \geq 0$

$(s_n) = (1, 3, 7, 15, \cdots)$ mit $s_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

Konvergent

ist eine Reihe (s_n), wenn die Folge der Teilsummen $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ konvergiert.

Jede geometrische Reihe mit $|q| < 1$ konvergiert und für ihren Grenzwert gilt:

$$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot q^i = \frac{a_0}{1 - q}}.$$