LINEARE FUNKTIONEN $y = m \cdot x + n$

m heißt Anstieg oder Steigung
n heißt y-Achsenabschnitt
Graphen linearer Funktionen sind stets Geraden

Konstante Funktionen → Spezialfall $m = 0$
Graphen sind waagerechte Geraden (parallel zur x-Achse)

Proportionale Funktionen → Spezialfall $n = 0$
Graphen gehen durch den Koordinatenursprung $(0|0)$

Einfluss des Parameters m

$m > 0$	$m < 0$	$m = 0$
Funktion ist monoton wachsend, verläuft vom III. in den I. Quadranten	Funktion ist monoton fallend, verläuft vom II. in den IV. Quadranten	Funktion ist konstant, waagerechter Graph

Einfluss des Parameters n
n bestimmt die Stelle an der die Gerade die y-Achse schneidet

Nullstelle x_0
Nullstelle x_0 ist die Stelle, an der die Gerade die x-Achse schneidet
der Funktionswert ist dort gleich Null: $m \cdot x_0 + n = 0$
die Nullstelle von $y = m \cdot x + n$ zu bestimmen, bedeutet die Gleichung $m \cdot x + n = 0$ zu lösen: $x_0 = -\frac{n}{m}$

Schnittpunkt S_x des Graphen mit der x-Achse
$S_x(x_0|0)$ wobei x_0 die Nullstelle der Funktion ist

Schnittpunkt S_y des Graphen mit der y-Achse
$S_y(0|n)$ wobei sich das n natürlich durch Einsetzen von $x = 0$ in $y = m \cdot x + n$ ergibt: $m \cdot 0 + n = n$

Anstieg einer Gerade durch zwei Punkte
Geht der Graph der Funktion $y = m \cdot x + n$ durch die Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$, dann gilt für den Anstieg $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Parallele Geraden
$y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ und $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sind parallel, wenn $m_1 = m_2$

Orthogonale (senkrechte) Geraden
$y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ und $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ verlaufen senkrecht zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ bzw. $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ gilt

Definitionsbereich einer linearen Funktion
DB: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich einer linearen Funktion
Fall $m \neq 0$ WB: $y \in \mathbb{R}$
Fall $m = 0$ WB: $y = n$

Anstiegswinkel α einer Geraden

ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion bei mathematisch positiver Drehrichtung (entgegen dem Uhrzeigersinn!), es gilt $\tan\alpha = m$

Berechnung von α für $m > 0$: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

Berechnung von α für $m < 0$: $\alpha = \tan^{-1}(m) + 180°$

Berechnung von α für $m = 0$: $\alpha = 0$

Schnittwinkel φ zwischen zwei Geraden

für den Fall orthogonaler Geraden ist er 90°

für den Fall nicht-orthogonaler Geraden ist es der kleinere der beiden Winkel, die entstehen, wenn sich diese zwei Geraden schneiden

für zwei lineare Funktionen $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ und $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$

gilt $\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$ bzw. $\varphi = \tan^{-1}\left(\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|\right)$

Typische Aufgaben

Gegeben ist der Graph einer linearen Funktion, bestimme die Funktionsgleichung!

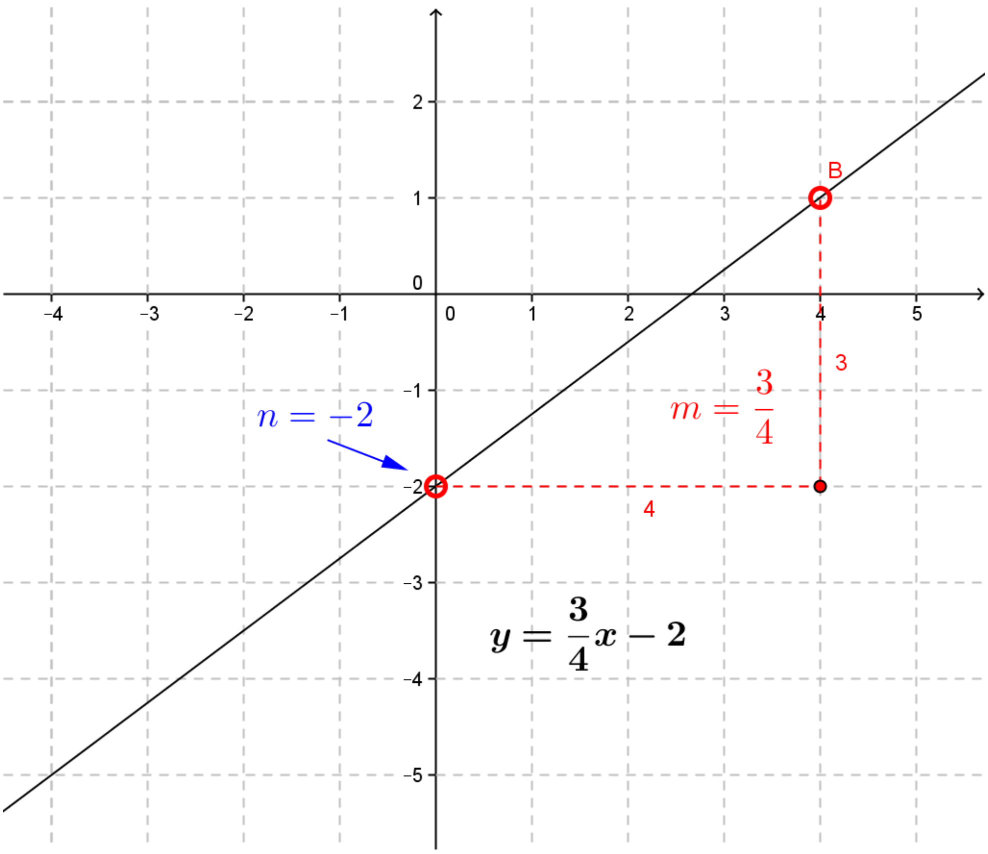
Lösung: suche zwei gut ablesbare Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$

berechne den Anstieg mit der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

wähle für n die Zahl an der Stelle wo die Gerade die y-Achse schneidet

lässt sich n nicht ablesen, dann berechne n durch Einsetzen eines Punktes in die Funktionsgleichung: $y_1 = m \cdot x_1 + n \quad \rightarrow \quad n = y_1 - m \cdot x_1$

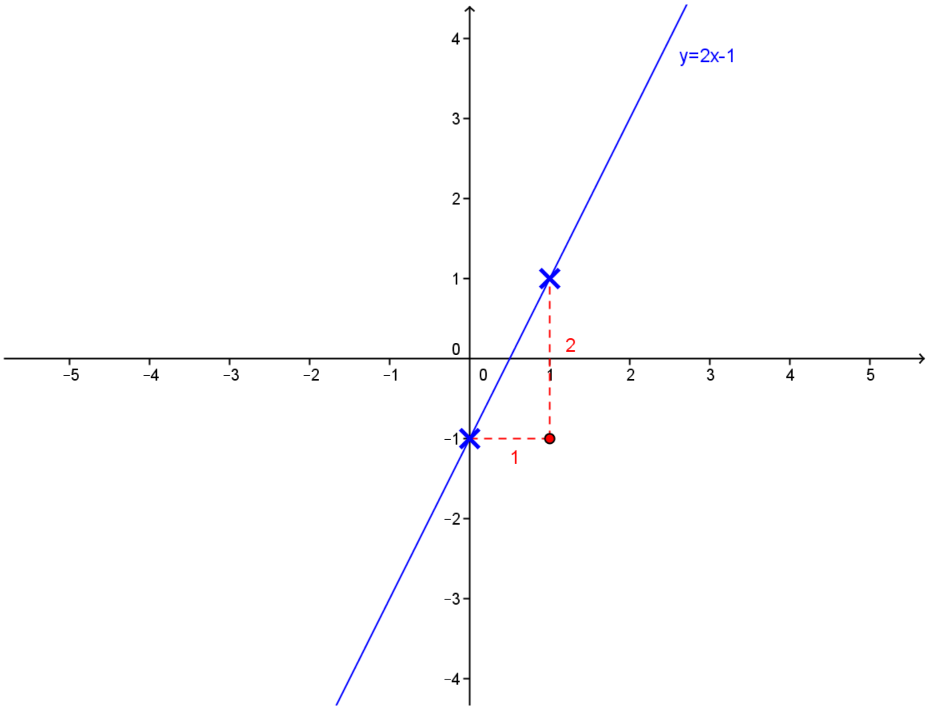
Beispiel:



Zeichne $y = 2x - 1$!

Lösung:

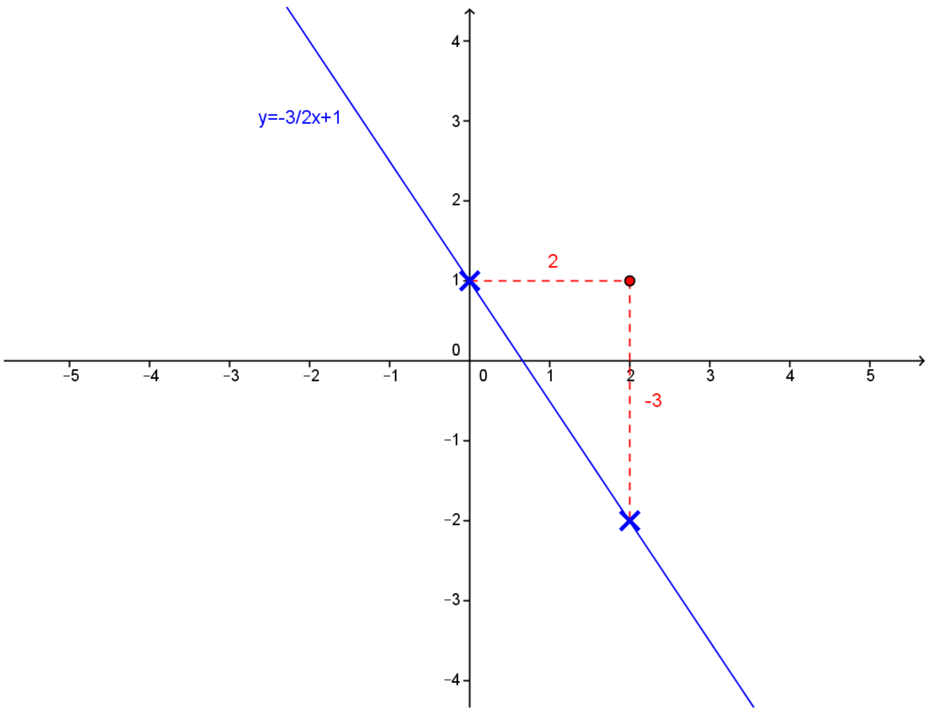
markiere die Stelle $n = -1$ auf der y-Achse (1. Punkt) - lies den Anstieg $m = 2$ als $\frac{2}{1}$ - gehe vom 1. Punkt aus 1 Schritt nach rechts und 2 Schritte nach oben und markiere diese Stelle (2. Punkt) - zeichne eine Gerade durch den 1. und den 2. Punkt - fertig.



Zeichne $y = -\frac{3}{2}x + 1$!

Lösung:

markiere die Stelle $n = +1$ auf der y-Achse (1.Punkt) - gehe vom 1. Punkt aus 2 Schritte nach rechts und 3 Schritte nach unten und - markiere diese Stelle (2. Punkt) - zeichne eine Gerade durch den 1. und den 2. Punkt - fertig.



Prüfe, ob der Punkt $P(x_P|y_P)$ auf dem Graphen von $y = m \cdot x + n$ liegt!
Lösung:
setze die x-Koordinate von P in die Funktion ein und überprüfe, ob dabei die y-Koordinate von P herauskommt:

$$m \cdot x_P + n \begin{cases} = y_P & \rightarrow P \ liegt \ auf \ dem \ Grapen \\ \neq y_P & \rightarrow P \ liegt \ \mathbf{nicht} \ auf \ dem \ Graphen \end{cases}$$

Beispiel: geg. $P(-2|6)$ und $y = -3x - 4$

$-3 \cdot (-2) - 4 = 6 - 4 = 2$
$2 \neq 6 \quad \rightarrow \quad P \ liegt \ \mathbf{nicht} \ auf \ dem \ Graphen$

Eine Gerade geht durch die Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$. Bestimme die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion!
Lösung:
bestimme erst m mit Hilfe der zwei Punkte und anschließend n durch Einsetzen des eben berechneten m und der Koordinaten eines der beiden Punkte in die Funktionsgleichung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \rightarrow \quad y_1 = m \cdot x_1 + n \quad \rightarrow \quad n = y_1 - m \cdot x_1 \quad \rightarrow \quad y = m \cdot x + n$$

Beispiel: geg. $A(-4|5)$ und $B(2|-1)$

$m = \frac{-1-5}{2-(-4)} = \frac{-6}{6} = -1$

$5 = -1 \cdot (-4) + n$
$5 = 4 + n$
$n = 5 - 4$
$n = 1$

$y = -x + 1$

Eine Gerade hat den Anstieg m und geht durch den Punkt $P(x_P|y_P)$. Bestimme die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion!
Lösung: $y_P = m \cdot x_P + n \quad \rightarrow \quad n = y_P - m \cdot x_P \quad \rightarrow \quad y = m \cdot x + n$

Beispiel: geg. $m = \frac{1}{3}$ und $P(4|14)$

$14 = \frac{1}{3} \cdot 4 + n$
$14 = \frac{4}{3} + n$
$n = 14 - \frac{4}{3}$
$n = \frac{38}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{38}{3}$

Bestimme die Anstiegswinkel der linearen Funktionen $y_1 = 2x - 1$ und $y_2 = -\frac{1}{3}x + 2$ sowie ihren Schnittwinkel!

Lösung:

Anstiegswinkel α_1: $\alpha_1 = \tan^{-1}(2) \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 63{,}4°$

Anstiegswinkel α_2: $\alpha_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + 180° = -18{,}4° + 180° \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 161{,}6°$

Schnittwinkel φ: $\varphi = \tan^{-1}\left(\left|\frac{2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|\right) = \tan^{-1}\left(\left|\frac{2\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right|\right) = \tan^{-1}\left(\left|\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}\right|\right) = \tan^{-1}(7)$

$\varphi = 81{,}9°$