$$f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$$

ges.:

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Polstellen, lokale Extrempunkte, Verhalten im Unendlichen, Gleichungen der Asymptoten, Funktionsgraph

Lsg.:

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$0 = \frac{4x+5}{x^2-1}$
$0 = 4x + 5$
$x_0 = -\frac{5}{4} = -1{,}25 \qquad \rightarrow \qquad S_x(-1{,}25 \mid 0)$

$f(0) = \frac{4 \cdot 0+5}{0^2-1} = -5 \qquad \rightarrow \qquad S_y(0 \mid -5)$

Polstellen

$0 = x^2 - 1$
$x^2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad x_{P1} = 1 \quad x_{P2} = -1$

$x_{P1} = 1:$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4x+5}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4x+5}{x^2-1} = +\infty$$

Polstelle bei $x = 1$ mit Vorzeichenwechsel $-/+$

$x_{P2} = -1:$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{4x+5}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{4x+5}{x^2-1} = -\infty$$

Polstelle bei $x = -1$ mit Vorzeichenwechsel $+/-$

lokale Extrempunkte

$$f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{-2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(4x^3+15x^2+12x+5)}{(x^2-1)^3}$$

$f'(x) = 0$

$\frac{-2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2} = 0$

$-2(2x^2+5x+2) = 0$

$2x^2+5x+2 = 0$

$x^2+2{,}5x+1 = 0$

$x_{1,2} = -1{,}25 \pm \sqrt{1{,}25^2-1}$
$x_{1,2} = -1{,}25 \pm 0{,}75$

$x_1 = -0{,}5 \qquad x_2 = -2$

$f''(-0{,}5) = -10{,}67 < 0 \quad \rightarrow \quad Hochpunkt\ \left(-0{,}5 \,\middle|\, f(-0{,}5)\right) = (-0{,}5 \mid -4)$

$f''(-2) = 0{,}67 > 0 \qquad \rightarrow \quad Tiefpunkt\ \left(-2 \,\middle|\, f(-2)\right) = (-2 \mid -1)$

Verhalten im Unendlichen

$$f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+5}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

$\rightarrow$ Asymptote $y = 0$

Funktionsgraph